

CORRECCIÓN EXAMEN LÓGICA. GRADO EN MATEMÁTICAS, 2/11/16

Ej. 1 En los apuntes.

Ej. 2 Queda relación R_1 no es transitiva ya que, por ejemplo,

$$1122 R_1 2233$$

$$2233 R_1 3344$$

Pero $1122 R_1 3344$

Por tanto no puede ser de equivalencia ni de orden.

Ej. 3 R_2 no es simétrica, ya que, por ejemplo,

$$1111 R_2 1122 \text{ pero } 1122 R_2 1111$$

Por tanto no es de equivalencia.

R_2 no es antisimétrica, ya que, por ejemplo

$$1122 R_2 2211$$

$$2211 R_2 1122$$

Pero $1122 \neq 2211$

Por tanto no es de orden.

Ej. 3. Ej. 3. Definimos a y b a la vez.

(1) Si φ es atómica, $b(\varphi) := 0$

Si p es símbolo de proposición atómica,
 $a(p) := 1$

$$a(T) = a(L) := 0$$

(2) Si φ es fórmula,

$$b(\neg\varphi) := b(\varphi)$$

$$a(\neg\varphi) := a(\varphi)$$

(3) Si φ, ψ son fórmulas, o conectiva binaria

$$b(\varphi \circ \psi) := b(\varphi) + b(\psi) + 1$$

$$a(\varphi \circ \psi) := a(\varphi) + a(\psi)$$

④ Para fórmulas atómicas:

$$a(\varphi) = 1 \leq b(\varphi) + 1 = 0 + 1 \quad \text{SE CUMPLE.}$$

② H.I.: φ cumple $a(\varphi) \leq b(\varphi) + 1$.

Veamos que $\neg\varphi$ cumple la desigualdad.

$$a(\neg\varphi) := a(\varphi) \stackrel{\text{DEF.}}{\leq} b(\varphi) + 1 = b(\neg\varphi) + 1. \quad \text{SE CUMPLE.}$$

③ H.I.: φ, γ cumplen la desigualdad.

Veamos que $\varphi \circ \gamma$ también la cumple.

$$\begin{aligned} a(\varphi \circ \gamma) &= a(\varphi) + a(\gamma) \stackrel{\text{DEF}}{\leq} b(\varphi) + 1 + b(\gamma) + 1 = \\ &= b(\varphi \circ \gamma) + 1 \quad \text{SE CUMPLE.} \end{aligned}$$

① Daremos I a la propiedad " φ cumple la igualdad $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$ ".

① De las fórmulas atómicas:

Si $\varphi = P$ proposición atómica,
entonces φ cumple I
ya que $a(\varphi) = 1 = \underbrace{b(\varphi)}_0 + 1$

Si $\varphi = T$ o $\varphi = \perp$, φ no cumple I.

② Si φ cumple I $\Rightarrow \neg\varphi$ cumple I

Si φ no cumple I $\Rightarrow \neg\varphi$ no cumple I

Esto es porque negar una fórmula no altera las funciones a y b.

Ej 3º) Si φ y γ cumplen $I \Rightarrow \varphi \circ \gamma$ cumple I
 porque $a(\varphi \circ \gamma) = a(\varphi) + a(\gamma) = b(\varphi) + 1 + b(\gamma) + 1 = b(\varphi \circ \gamma)$
 Si alguna de φ ó γ no cumple $I \Rightarrow \varphi \circ \gamma$ no cumple I
 porque $a(\varphi \circ \gamma) = a(\varphi) + a(\gamma) < b(\varphi) + 1 + b(\gamma) + 1 = b(\varphi \circ \gamma)$

Respuesta: Cumplen I

$$\{ \text{proposiciones atómicas} \} \cup \{ \neg q / q \text{ cumple } I \} \cup \\ \cup \{ \varphi \circ \gamma / \varphi \text{ y } \gamma \text{ cumplen } I \} = \\ = \{ \text{fórmulas en las que no aparece } T \text{ ni } F \}$$

- Ej 4º) a: la piedra es grande
 b: la piedra es azul
 c: la piedra es dura

Oración 1: $\varphi_1 = g \rightarrow a \vee d$

Oración 2: $\varphi_2 = \neg a \vee \neg d \rightarrow \neg g$

$$\text{b) } \varphi_2 = g \rightarrow \neg(\neg a \vee \neg d) \equiv g \rightarrow a \wedge d$$

$\frac{\text{contraposición}}{\text{De Morgan.}}$

$\varphi_1 \neq \varphi_2$, ya que $\begin{cases} g: 1 \\ a: 1 \\ d: 0 \end{cases}$ es modelo de φ_1
 y contrajemplo de ~~φ_2~~ φ_2

Sin embargo $\Phi_2 \models \Phi_1$.

Veámoslo: si v es contracímpolo de $\Phi_1 \Rightarrow$

$$v(g) = 1$$

$$v(a \vee d) = 0 \Rightarrow v(a) = v(d) = 0$$

Es decir $\begin{cases} g:1 \\ a:0 \\ d:0 \end{cases}$

es el único contracímpolo de Φ_1 .

Esta valoración también es contracímpolo de Φ_2 .

Por tanto todo modelo de Φ_2 también lo es de Φ_1 .

luego $\Phi_2 \models \Phi_1$

E/S

1. $p_1(q \vee r)$ Pr.
2. p $\exists_{A, 1}$
3. $q \vee r$ $\exists_{A, 1.}$

(conc:
 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$)

$\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 4. q. \text{ Pr. aux.} \\ \hline 5. p_1 q \quad I_{A, 2, 4}. \\ \hline 6. (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad IV, 5 \\ \hline \end{array}}$

7. $q \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $I \rightarrow (4-6)$

$\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 8. r \text{ Pr. aux.} \\ \hline 9. p_1 r \quad I_{A, 2, 8} \\ \hline 10. (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad IV, 9. \\ \hline \end{array}}$

11. $r \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $I \rightarrow (8-10)$.

12. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $EV, 3, 7, 11$

1.	$(P \wedge q) \vee (P \wedge r)$	Pr.
2.	$P \wedge q$	Pr. aux.
3.	P	E _A , 2
4.	q	E _A , 2
5.	q $\vee r$	I _V , 4
6.	$P \wedge (q \vee r)$	I _A , 3, 5

(conc.
P \wedge (q \vee r))

$$7. P \wedge q \rightarrow P \wedge (q \vee r) \ I \rightarrow (2-6)$$

8.	$P \wedge r$	Pr. aux.
9.	P	E _A , 8
10.	q	E _A , 8
11.	q $\vee r$	I _V , 10
12.	$P \wedge (q \vee r)$	I _A , 9, 11

$$13. P \wedge r \rightarrow P \wedge (q \vee r) \ I \rightarrow (8-12)$$

$$14. P \wedge (q \vee r) \ EV, 1, 7, 13.$$

86

1. $P \rightarrow q \vee r$ Pr
2. $\neg(\neg P)$ Pr
3. $\neg P \rightarrow S$ Pr
4. $\neg S \vee q$ Pr.

(conc: q)

5.	$\neg q$	Pr-aux.
6.	$\neg S$	T29, 5, 4.
7.	P	T28, 6, 3
8.	$\neg r \vee \neg P$	T8, 2
9.	$\neg r$	T29, 7, 8
10.	$q \vee r$	E \rightarrow , 7, 1
11.	q	T29, 10, 9
12.	$q \wedge \neg q$	I _A , 5, 11

$$13. \neg q \rightarrow q \wedge \neg q \ I \rightarrow (5-12)$$

$$14. \neg \neg q \ I \neg, 13$$

$$15. q \ E\rightarrow, 14$$